

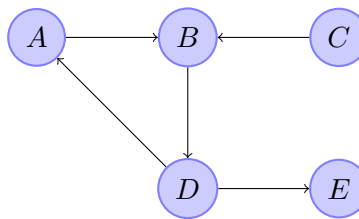
Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 9

Dieses Blatt wurde in der Übung am 22.01.2010 besprochen.

Zu Aufgabe 1

$$\succ = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a), (d, e)\}$$



(a)

Die transitive Hülle $\xrightarrow{+} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e),$
 $(b, a), (b, b), (b, d), (b, e),$
 $(c, a), (c, b), (c, d), (c, e),$
 $(d, a), (d, b), (d, d), (d, e)\} .$

Die reflexive, transitive Hülle $\rightarrow = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e),$
 $(b, a), (b, b), (b, d), (b, e),$
 $(c, a), (c, b), (\mathbf{c, c}), (c, d), (c, e),$
 $(d, a), (d, b), (d, d), (d, e),$
 $(\mathbf{e, e})\} .$

Die reflexive, transitive, symmetrische Hülle $\leftrightarrow = \{a, b, c, d, e\} \times \{a, b, c, d, e\} .$

(b) Die Knoten a, b, c, e haben nicht mehr als einen Nachfolger bzgl. \succ : an diesen Stellen ist somit keine Divergenz möglich.

Der Knoten d hat zwei unmittelbare Nachfolger: a und e . Wegen $a \xrightarrow{+} e$ (s.o.) ist \succ lokal konfluent. Ebenfalls ist \succ konfluent, da von allen Knoten aus, die von d erreichbar sind (a, b, d, e), der Knoten e erreichbar ist.

(Nota bene: Der Satz, dass jedes noethersche und lokal konfluente Reduktionssystem konfluent ist, ist hier nicht anwendbar, da die Relation nicht noethersch ist.)

- (c) Wir fügen einen neuen Knoten f , sowie das Paar (a, f) hinzu. Die einzige neue Divergenz ist $f \prec a \succ b$. Wegen $b \overset{+}{\rightarrow} a \overset{+}{\rightarrow} f$ bleibt \succ lokal konfluent. Die neue Relation ist aber nicht konfluent, da $b \overset{+}{\rightarrow} e$ gilt, und weder f noch e Nachfolger bzgl. \succ haben.

Zu Aufgabe 2

Betrachten wir zunächst nur (\mathbb{N}, \succ)

- (a) Es gilt:

$$6 \succ 2, 6 \succ 3$$

Aber 2 und 3 sind irreduzible Elemente, weil sie keine echten Teiler größer 1 haben. Also ist das Reduktionssystem **nicht** lokal konfluent.

- (b) ... und damit natürlich auch nicht konfluent.
- (c) Aus $n \succ m$ folgt, dass $n > m$. In \mathbb{N} kann es aber keine unendliche absteigende Kette geben ($(\mathbb{N}, >)$ ist noethersch), also ist (\mathbb{N}, \succ) noethersch.
- (d) Die irreduziblen Elemente sind gerade die natürlichen Zahlen, die keine natürlichen Teiler haben außer 1 und sich selbst, also die Primzahlen.

Hier fällt der Begriff irreduzibel mit dem aus der Algebra/Zahlentheorie zusammen.

Desweiteren nun die Betrachtung für (\mathbb{N}', \succ) : 1 ist Teiler jeder positiven natürlichen Zahl, also gilt, dass: $n \succ 1$ für alle $n \in \mathbb{N}'$.

- (a) folgt aus (b).
- (b) Sei $n \succ m_1$ und $n \succ m_2$. Dann ist wegen $m_1 \succ 1$ und $m_2 \succ 1$ die Konfluenz gegeben.
- (c) Das Argument von oben greift auch hier.
- (d) 1 ist das einzig irreduzible Element.

Zu Aufgabe 3

Zur Erinnerung das Prinzip der noetherschen Induktion:

Es sei $X \subseteq D$, so daß für alle $a \in D$ gilt

$$\underbrace{\{b \mid a \succ b\}}_{\text{Induktionsannahme}} \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist $X = D$.

Wir benutzen die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d.h., es gelte $(m_1, m_2) \succ (n_1, n_2)$ genau dann, wenn

- $m_1 > n_1$ oder
- $m_1 = n_1$ und $m_2 > n_2$.

Die Relation \succ ist offensichtlich noethersch mit dem minimalen Element $(0, 0)$.

Sei $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge aller Eingabepaare, für die die Ackermann-Funktion terminiert. Wir zeigen mittels noetherscher Induktion, daß $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sei nun also $(a_x, a_y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig, und es gelte $(b_x, b_y) \in X$ für alle (b_x, b_y) mit $(a_x, a_y) \succ (b_x, b_y)$ (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, daß daraus $(a_x, a_y) \in X$ folgt.

1. Fall: $a_x = 0$

$(0, a_y) \in X$ für alle $a_y \in \mathbb{N}$. Dies ergibt sich aus dem Programm (ohne Verwendung der Induktionsannahme).

2. Fall: $a_x \neq 0, a_y = 0$

Aus dem Programm ersehen wir, daß $A(a_x, 0) = A(a_x - 1, 1)$. Da $(a_x, 0) \succ (a_x - 1, 1)$, folgt aus der Induktionsannahme, dass $(a_x - 1, 1) \in X$. Damit ist auch $(a_x, 0) \in X$, da $A(a_x, 0)$ nur einen Schritt mehr macht als $A(a_x - 1, 1)$.

3. Fall: $a_x \neq 0, a_y \neq 0$

Es gilt $(a_x, a_y) \succ (a_x, a_y - 1)$ und somit per Induktionsannahme $(a_x, a_y - 1) \in X$. Also terminiert $A(a_x, a_y - 1)$.

Es gilt aber auch $(a_x, a_y) \succ (a_x - 1, b_y)$ für alle b_y . Dies gilt insbesondere für $b_y = A(a_x, a_y - 1)$. Also ist $(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1)) \in X$, was bedeutet, dass $A(a_x, a_y) = A(a_x - 1, A(a_x, a_y - 1))$ terminiert.

Zu Aufgabe 4

(a) Die Menge aller von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten ist die *kleinste* Menge, die

- $\beta(x)$ enthält und
- unter Anwendung von E abgeschlossen ist.

Diese kleinste Menge ist eindeutig bestimmt und Teilmenge jeder Menge mit diesen beiden Eigenschaften.

Darum lassen sich die von $\beta(x)$ erreichbaren Knoten auch als diejenigen charakterisieren, die in *jeder* Menge mit den beiden genannten Eigenschaften liegen (zu denen insbesondere auch die kleinste solche Menge zählt):

$$\phi(x, y) = \forall Q ((Q(x) \wedge \forall w \forall z (Q(w) \wedge E(w, z) \rightarrow Q(z))) \rightarrow Q(y)) .$$

(b) Ein gerichteter Graph ist zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten im Graph gibt:

$$\forall x \forall y (\neg(x \doteq y) \rightarrow \phi(x, y))$$

Da Gleichheit in PL2 definierbar ist, kann man auch ohne das Gleichheitszeichen auskommen:

$$\forall x \forall y (\exists P (P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow \phi(x, y))$$