1. Zwischentest Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2009/2010

Prof. Dr. Bernhard Beckert

10. Dezember 2009

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

Die Bearbeitungszeit beträgt 30 Minuten.

A1 (10)	A2 (5)	A3 (9)	A4 (6)	Σ (30)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5+5 Punkte)

a. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Wenn bei Anwendung des Davis-Putnam-Verfahrens nach einem Vereinfachungsschritt keine Klausel mehr zur Verfügung steht, dann ist die ursprüngliche Klauselmenge unerfüllbar.		X
Es gibt Formeln, die sowohl in DNF als auch in KNF sind.	X	
Der Markierungsalgorithmus für Hornformeln entscheidet die Erfüllbarkeit der Eingabeformel in polynomieller Zeit.	X	
Wenn A und B erfüllbar sind, dann ist auch $A \rightarrow B$ erfüllbar.	X	
Daraus, dass in einem Shannongraphen für eine Formel f eine Kante zum mit 0 beschrifteten Knoten führt, kann man schließen, dass f unerfüllbar ist.		X

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Die Substitution $\{x/y, y/x\}$ ist eine Variablenumbenennung.	X	
Die Substitution $\{y/x,\ x/g(c)\}$ kann auf die Formel $\exists x\, p(h(y), x)$ ohne Kollision angewendet werden.		X
Zu jeder prädikatenlogischen Interpretation (D, I) gibt es eine komplementäre Interpretation (D', I'), so dass – außer der logischen Konstanten $\mathbf{1}$ – keine Formel sowohl in (D, I) als auch in (D', I') wahr ist.		X
Jeder vollständige aussagenlogische Kalkül ist auch korrekt.		X
Der aussagenlogische Hilbert-Kalkül, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde, ist korrekt und vollständig.	X	

2 Resolution (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des aussagenlogischen Resolutionskalküls, dass die Formel

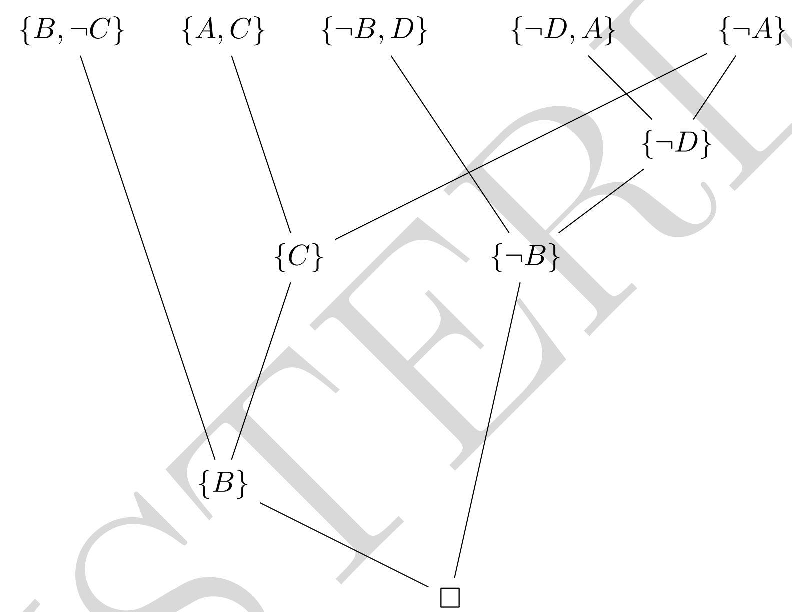
$$(\neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee \neg(B \to D) \vee \neg(D \to A) \vee A$$

allgemeingültig ist.

Resolution ist ein Widerlegungskalkül. Wir zeigen also die Unerfüllbarkeit von $\neg F$. Nach De Morgan und Auflösung der Implikation bleibt:

$$\neg F \equiv (B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg D \vee A) \wedge \neg A$$

Klauselform und Beweis:



3 Davis-Putnam-Verfahren (9 Punkte)

Professor Beckert stellt bei der Mensaleitung einen Antrag zur zukünftigen Gestaltung des Mensa-Essens:

1. Zu jeder Mahlzeit muß es Brot geben, wenn kein Dessert gereicht wird.

   Aussage: $\boxed{\neg D \to B}$ Klausel(n): $\boxed{D \vee B}$

2. Wird Brot und Dessert serviert, darf es dazu selbstverständlich keine Suppe geben.

   Aussage: $\boxed{(B \wedge D) \to \neg S}$ Klausel(n): $\boxed{\neg B \vee \neg D \vee \neg S}$

3. Wenn aber Suppe gereicht wird oder kein Dessert gereicht wird, darf es auch kein Brot geben.

   Aussage: $\boxed{(S \vee \neg D) \to \neg B}$ Klausel(n): $\boxed{\neg S \vee \neg B, \quad D \vee \neg B}$

Die Kundenfreundlichkeit der Mensaleitung gebietet es ihr, diesen absonderlichen Wünschen nachzukommen. Sie hat jedoch große Schwierigkeiten mit der Logik. Helfen Sie ihr weiter:

a. Formalisieren Sie die Aussagen **(1)** bis **(3)** in Aussagenlogik (tragen Sie Ihr Ergebnis in die obige Tabelle ein). Benutzen Sie die dazu die aussagenlogischen Atome B („es gibt Brot"), S („es gibt Suppe") und D („es gibt Dessert").

b. Wandeln Sie die Aussagen in Klauselnormalform um (tragen Sie Ihr Ergebnis in die obige Tabelle ein).

c. Benutzen Sie das Davis-Putnam-Verfahren, um alle erfüllenden Belegungen der Klauselmenge aus **b.** zu bestimmen.

Hinweis: Es gibt mehr als eine erfüllende Belegung.

Initiale Klauselmenge	$D \vee B$,	$\neg B \vee \neg D \vee \neg S$,	$\neg S \vee \neg B$,	$D \vee \neg B$
Wähle (z.B.) B:	$-$,	$\neg D \vee \neg S$,	$\neg S$,	D
Unit D:	$-$,	$\neg S$,	$\neg S$,	$-$
Unit $\neg S$:	$-$,	$-$,	$-$,	$-$
Betrachte $\neg B$:	D,	$-$,	$-$,	$-$
Unit D:	$-$,	$-$,	$-$,	$-$

Erfüllende Belegungen sind also:

i. $I(B) = W \quad I(D) = W \quad I(S) = F$

ii. $I(B) = F \quad I(D) = W \quad I(S) = F$

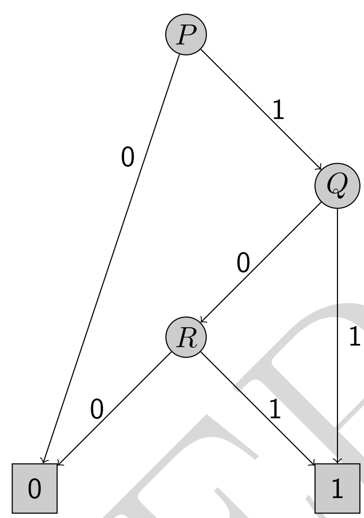
iii. $I(B) = F \quad I(D) = W \quad I(S) = W$

4 Shannongraphen (3+3 Punkte)

a. Zeichnen Sie einen vollständig reduzierten Shannongraphen für die Formel

$$P \land (\neg Q \to R) \ .$$

Benutzen Sie die Variablenordnung $P < Q < R$.



b. Gegeben sei die Variablenordnung $P < Q$. Zeichnen Sie einen vollständig reduzierten Shannongraphen für die Formel

$$(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q) \ .$$

<u>Hinweis:</u> Überlegen Sie sich zunächst, was diese Formel aussagt.

Da $(\neg P \lor \neg Q) \equiv \neg(P \land Q)$ (De Morgan), ist die Formel unerfüllbar. Deswegen kann ihr vollständig reduzierter Shannongraph sofort folgendermaßen angegeben werden: