

# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



# Termersetzungssysteme

## *Einstieg*

Termersetzungssysteme sind eine sehr erfolgreiche Methode in der Gleichungslogik.

Aus einer Menge symmetrischer Gleichungen  $E$  wird ein gerichtetes *Termersetzungssystem*.

Die den Termersetzungssystemen zugrunde liegende Idee einer eindeutigen Normalform und die schrittweise Normalisierung eines symbolischen Ausdrucks ist so elementar, daß sie in vielen Zusammenhängen in unterschiedlichen Ausprägungen eine Rolle spielt.

Der übergreifende Begriff sind die *Reduktionssysteme*.



## Definition

Ein **Reduktionssystem**  $(D, \succ)$  besteht aus einer nichtleeren Menge  $D$  und einer beliebigen, binären Relation  $\succ$  auf  $D$ .

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

- $\rightarrow$  die reflexive, transitive Hülle von  $\succ$
- $\rightarrow^+$  die transitive Hülle von  $\succ$
- $\leftrightarrow$  die reflexive, transitive, symmetrische Hülle von  $\succ$



# Einschränkende Eigenschaften von Reduktionssystemen

## Definition

1. Ein Reduktionssystem  $(D, \succ)$  heißt **konfluent**, wenn für jedes Tripel  $s, s_1, s_2 \in D$  mit  $s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2$  ein  $t \in D$  existiert mit  $s_1 \rightarrow t$  und  $s_2 \rightarrow t$ .
2.  $(D, \succ)$  heißt **lokal konfluent**, wenn für alle  $s, s_1, s_2 \in D$  mit  $s \succ s_1, s \succ s_2$  ein  $t \in D$  mit  $s_1 \rightarrow t$  und  $s_2 \rightarrow t$  existiert.
3.  $(D, \succ)$  heißt **noethersch** (oder **wohlfundiert** oder **terminierend**), wenn es keine unendlichen Folge  $s_0 \succ s_1 \dots \succ s_i \succ \dots$  gibt.
4. Ein konfluentes und noethersches Reduktionssystem heißt **kanonisch**.
5. Ein Element  $s \in D$  heißt **irreduzibel** (oder eine **Normalform**) in  $(D, \succ)$ , wenn kein  $t \in D$  existiert mit  $s \succ t$ .
6. Sei  $s \in D$ . Ein Element  $s_0 \in D$  heißt eine **Normalform für s** in  $(D, \succ)$ , wenn  $s_0$  irreduzibel ist und  $s \rightarrow s_0$  gilt.



# Kanonische Reduktionssysteme

## Theorem

Sei  $(D, \succ)$  ein kanonisches Reduktionssystem. Dann gilt:

1. Zu jedem  $s \in D$  gibt es eine eindeutige Normalform. Diese bezeichnen wir mit  $\text{irr}(s)$ .
2. Für  $s, t \in D$  gilt

$$s \leftrightarrow t \text{ gdw } \text{irr}(s) = \text{irr}(t)$$

3.  $(D, \succ)$  sei berechenbar im folgenden Sinne: Es gibt einen Algorithmus, der zu jedem  $t \in D$  ein  $t'$  mit  $t \succ t'$  liefert, wenn ein solches existiert, und andernfalls ausgibt „ $t$  ist irreduzibel“, Dann ist die Relation  $\leftrightarrow$  entscheidbar.



# Beweis

## Eindeutigkeit und Existenz der Normalform

Angenommen es gäbe für  $s \in D$  zwei Normalformen  $s_1, s_2$ .

D.h. es gilt  $s \rightarrow s_1$  und  $s \rightarrow s_2$ .

Wegen der Konfluenz von  $(D, \succ)$  gibt es  $t \in D$  mit

$s_1 \rightarrow t$  und  $s_2 \rightarrow t$ .

Das widerspricht der Irreduzibilität von  $s_1, s_2$ .

Existenz einer Normalform für  $s \in D$ ,

Setze  $s_0 = s$  und wählen ein  $s_{i+1}$  mit  $s_i \succ s_{i+1}$ , solange  $s_i$  nicht irreduzibel ist.

Da  $(D, \succ)$  noethersch ist, wird nach endlich vielen Schritten ein irreduzibles  $s_i$  erreicht.



## Beweis

$$s \leftrightarrow t \text{ gdw } irr(s) = irr(t)$$

Die Implikation von rechts nach links ist trivial.

Gelte jetzt  $s \leftrightarrow t$ .

Nach Definition von  $\leftrightarrow$  gibt es eine Folge  $s = s_0, s_1, \dots, s_n = t$ , so daß für alle  $0 \leq i < n$  entweder  $s_i \succ s_{i+1}$  oder  $s_{i+1} \succ s_i$  gilt.

Der Nachweis von  $irr(s) = irr(t)$  geschieht durch Induktion über  $n$ .

Der Induktionsanfang  $n = 0$ , d.h.  $s = t$  ist trivial.

Sei also die Behauptung für Folgen der Länge  $n - 1$  schon bewiesen. Also gilt  $irr(s_1) = irr(t)$ .

Im Fall  $s_0 \succ s_1$  gilt offensichtlich  $irr(s_0) = irr(s_1)$ , und wir sind fertig.

Falls  $s_1 \succ s_0$  gilt, folgt aus der Konfluenz, daß ebenfalls  $irr(s_0) = irr(s_1)$  gelten muß.



# Beweis

## Entscheidbarkeit von $\leftrightarrow$

Zu gegebenem  $s, t$  wird wie folgt entschieden, ob  $s \leftrightarrow t$ .

Beginnend mit  $s_0 := s$ , liefert der vorausgesetzte Algorithmus Elemente  $s_i$  mit  $s_0 \succ s_1 \succ s_2 \succ \dots$ , bis hierbei ein irreduzibles  $s_m$  erreicht ist.

Da  $(D, \succ)$  noethersch ist, tritt das auf jeden Fall ein und wird durch „ $s_m$  ist irreduzibel“ mitgeteilt, ferner gilt  $s_m = irr(s)$ .

Entsprechend erhält man  $irr(t)$  aus  $t$ .

Nach (2) ist  $s \leftrightarrow t$  genau dann, wenn  $irr(s) = irr(t)$ .





# Noethersche Induktion

## Theorem

Für ein noethersches Reduktionssystem  $(D, \succ)$  gilt das folgende Beweisprinzip der Noetherschen Induktion:

Es sei  $X \subseteq D$ , so daß für alle  $a \in D$  gilt

$$\{b \mid a \succ b\} \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dann ist  $X = D$ .



## Noethersche Induktion

*Proof.*

Angenommen es gibt  $a_0 \in D \setminus X$ . Nach Annahme über  $X$  gilt  
 $\{b \mid a_0 \succ b\} \not\subseteq X$ .

Es gibt also ein  $a_1$  mit

$$a_0 \succ a_1, a_1 \notin X$$

Nach Annahme über  $X$  gilt wieder  $\{b \mid a_1 \succ b\} \not\subseteq X$  und es gibt ein  $a_2$  mit

$$a_0 \succ a_1 \succ a_2, a_2 \notin X$$

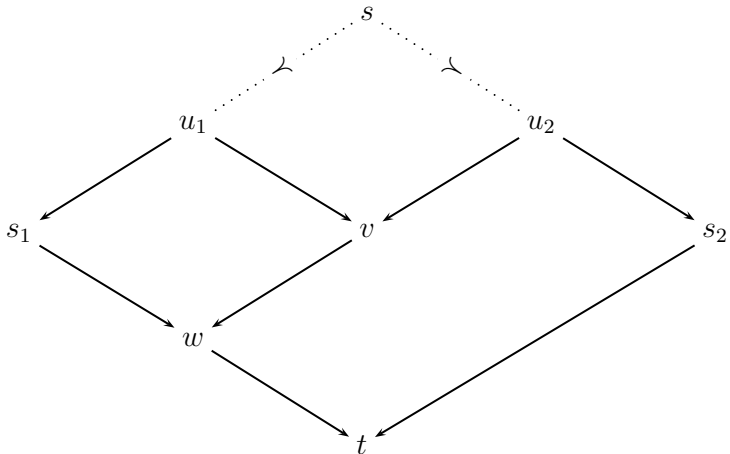
Führt man in dieser Weise fort, so erhält man eine unendliche Folge  
 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $a_i \succ a_{i+1}$  für alle  $i$ . Das ist ein Widerspruch, denn  $(D, \succ)$  war  
als noethersch vorausgesetzt. □



## Von lokaler zu uneingeschränkter Konfluenz

### Theorem

Wenn  $(D, \succ)$  ein noethersches und lokal konfluentes Reduktionssystem ist, dann ist  $(D, \succ)$  konfluent, d. h. kanonisch.



## Beweis

Wir verwenden noethersche Induktion bezüglich der Menge

$$\text{Confl} := \{s \mid \text{für alle } s_1, s_2 \\ \text{mit } s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2 \\ \text{existiert ein } t \text{ mit } s_1 \rightarrow t, s_2 \rightarrow t\}$$

Dazu müssen wir also zeigen, daß für alle  $s$  gilt:

$$\{s' \mid s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

Es seien  $s, s_1, s_2$  gegeben mit  $s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2$ .

Im Falle  $s = s_1$  oder  $s = s_2$  ist man fertig. (Etwa:  $s_1 = s \rightarrow s_2$ ).

Sei also  $s \neq s_1, s \neq s_2$ .



## Beweis (Forts.)

Nachweis von

$$\{s' \mid s \succ s'\} \subseteq \text{Confl} \Rightarrow s \in \text{Confl}$$

im Falle  $s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2$  mit  $s \neq s_1, s \neq s_2$ .

Es existieren  $u_1, u_2$  mit  $s \succ u_1 \rightarrow s_1$  und  $s \succ u_2 \rightarrow s_2$ .

Wegen der lokalen Konfluenz von  $(D, \succ)$  existiert ein  $v$  mit  $u_1 \rightarrow v, u_2 \rightarrow v$ .

Nach Voraussetzung („Induktionsannahme“) liegt  $u_1$  in  $\text{Confl}$ . Also gibt es ein  $w$  mit  $s_1 \rightarrow w$  und  $v \rightarrow w$ .

Entsprechend schließen wir aus der Induktionsannahme  $u_2 \in \text{Confl}$ , daß ein Term  $t$  existiert mit  $s_2 \rightarrow t$  und  $w \rightarrow t$ .

Wir haben  $s_1 \rightarrow t$  und  $s_2 \rightarrow t$  und somit  $s \in \text{Confl}$ , was zu beweisen war.

