

# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



# Negationsnormalform

## Definition

Eine Formel  $A \in \text{For}$  heißt

1. eine **Negationsnormalform**, wenn jedes Negationszeichen in  $A$  vor einer atomaren Teilformel steht. (Insbesondere kommt keine Teilformel der Form  $\neg\neg B$  in  $A$  vor)
2. *bereinigt*, wenn
  - $\text{Frei}(A) \cap \text{Bd}(A) = \emptyset$
  - die hinter Quantoren stehenden Variablen paarweise verschieden sind.

## Theorem

Zu jeder Formel  $A$  gibt es eine logisch äquivalente

1. Formel  $B$  in Negationsnormalform.
2. bereinigte Formel  $B$ .



# Pränexe Normalform

## Definition

$A \in \text{For}$  heißt eine *Pränexe Normalform*, wenn  $A$  die Gestalt hat

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$$

mit  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x_i \in \text{Var}$  und  $B$  quantorenfrei. Man nennt  $B$  die *Matrix* von  $A$ .



# Pränexe Normalform

## Theorem

Zu jeder Formel  $A$  gibt es eine äquivalente in Pränex-Normalform. Sie läßt sich aus  $A$  algorithmisch ableiten.

Abhängig von der Reihenfolge der angewandten Äquivalenzen kann man z. B. aus

sowohl  
als auch

$$\forall x p(x) \rightarrow \forall y q(y)$$
$$\exists x \forall y (p(x) \rightarrow q(y))$$
$$\forall y \exists x (p(x) \rightarrow q(y))$$

erhalten.



# Pränexe Normalform

## Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$



# Pränexe Normalform

## Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$



# Pränexe Normalform

## Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$



# Pränexe Normalform

## Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (\exists u (p(x, z) \rightarrow r(u, y))))))$$





# Pränexe Normalform

## Beispiel

Aus

$$\forall y (\forall x (\forall y p(x, y)) \rightarrow \exists x r(x, y))$$

erhält man sukzessive:

$$\forall y (\forall x (\forall z p(x, z)) \rightarrow \exists u r(u, y))$$

$$\forall y (\exists x (\forall z p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y)))$$

$$\forall y (\exists x (\exists z (p(x, z) \rightarrow \exists u r(u, y))))$$

$$\forall y \exists x \exists z \exists u (p(x, z) \rightarrow r(u, y))$$



# Quantoren gegen Funktionszeichen

## Darstellung mit Existenzquantor

1.  $\forall x \exists y (y \doteq x + x)$
2.  $\forall x \exists y (x < y)$
3.  $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x + z \doteq y)$

## Darstellung mit Funktionszeichen

1.  $\forall x (do(x) \doteq x + x)$
2.  $\forall x (x < gr(x))$
3.  $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x + diff(x, y) \doteq y)$



# Noch einmal die Funktionszeichen mit ihren Interpretationen

## Darstellung mit Funktionszeichen

1.  $\forall x(do(x) \doteq x + x)$
2.  $\forall x(x < gr(x))$
3.  $\forall x \forall y(x < y \rightarrow x + diff(x, y) \doteq y)$

## Interpretationen

1.  $do^{\mathcal{N}_1}(d) = d + d$  (einzige Möglichkeit)
2. etwa:  $gr^{\mathcal{N}_2}(d) = d + 1$
3. etwa:

$$diff^{\mathcal{N}_3}(d_1, d_2) = \begin{cases} d_2 - d_1 & \text{falls } d_1 < d_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Wert im Fall  $d_2 \leq d_1$  ist willkürlich gewählt.



# Skolem-Normalform

## Definition

Eine Formel ist in *Skolem-Normalform*, wenn sie

- geschlossen ist
- die Gestalt  $\forall x_1 \dots \forall x_n B$  hat mit quantorenfreiem  $B$
- die Matrix  $B$  in KNF ist.



# Skolem-Normalform

## Theorem

Zu jedem  $A \in \text{For}_\Sigma$  gibt es eine endliche Erweiterung  $\Sigma_{sk}$  von  $\Sigma$  und eine Formel  $A_{sk} \in \text{For}_{\Sigma_{sk}}$  mit

- $A_{sk}$  ist in Skolem-Normalform
- $A_{sk}$  hat ein Modell genau dann, wenn  $A$  ein Modell hat.

$A_{sk}$  läßt sich aus  $A$  algorithmisch erhalten.



## Beispiel 1

Gegeben:

$$\forall x(\exists y(p(y)) \wedge \exists z(q(x, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall x\exists y\exists z(p(y) \wedge q(x, z))$$

Skolem Normalform:

$$\forall x(p(f_1(x)) \wedge q(x, f_2(x)))$$



## Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$



## Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$





## Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$

Skolemisierung:

$$\forall w \forall y(p(w, f_1(w)) \vee (q(w, f_1(w), y) \wedge r(y, f_2(w, y))))$$



## Beispiel 2

Gegeben:

$$\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

All-Abschluß:

$$\forall w \exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z r(y, z)))$$

Pränex Normalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z(p(w, x) \vee (q(w, x, y) \wedge r(y, z)))$$

Skolemisierung:

$$\forall w \forall y(p(w, f_1(w)) \vee (q(w, f_1(w), y) \wedge r(y, f_2(w, y))))$$

Matrix in KNF, Skolem Normalform:

$$\forall w \forall y( (p(w, f_1(w)) \vee q(w, f_1(w), y)) \wedge (p(w, f_1(w)) \vee r(y, f_2(w, y))))$$



## Definition

### Grundinstanzen

Sei  $A := \forall x_1 \dots \forall x_n B$

mit quantoremfreiem  $B$  eine geschlossenen Formel.

Eine **Grundinstanz** von  $A$  ist eine Formel

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}(B)$$

mit Grundtermen  $t_1, \dots, t_n$ .

Ist  $M$  eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln, so sei

$$\text{Grundinstanzen}(M)$$

die Menge **aller** Grundinstanzen **aller** Formeln in  $M$ .



# Herbrand-Strukturen

## Definition

Die Signatur  $\Sigma$  enthalte mindestens eine Konstante.

Eine Interpretation  $(D, I)$  von  $\Sigma$  heißt *Herbrand-Interpretation* oder *Herbrand-Struktur*, wenn

1.  $D = \text{Term}_{\Sigma}^0 =$  Menge der Grundterme.
2.  $I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$   
für alle Funktionssymbole  $f \in \Sigma$   
und beliebige Grundterme  $t_1, \dots, t_n$ .

In einer Herbrand-Struktur wird jeder Grundterm  $t$  als er selbst interpretiert,

$$I(t) = t$$

Spielraum für *verschiedene* Herbrand-Strukturen gibt es nur bei der Interpretation der Prädikatsymbole.



## Satz von HERBRAND

### Theorem

$\Sigma$  enthalte mindestens eine Konstante, und es sei  $M$  eine Menge geschlossener, universell quantifizierter Formeln. Ferner enthalte keine Formel in  $M$  das Gleichheitssymbol  $\doteq$ . Dann sind äquivalente Aussagen

1.  $M$  hat ein Modell
2.  $M$  hat ein Herbrand-Modell
3. Grundinstanzen( $M$ ) hat ein Modell
4. Grundinstanzen( $M$ ) hat ein Herbrand-Modell.



## Beweisübersicht

1.  $M$  hat ein Modell
2.  $M$  hat ein Herbrand-Modell
3. Grundinstanzen( $M$ ) hat ein Modell
4. Grundinstanzen( $M$ ) hat ein Herbrand-Modell.

Die Implikationen  $4 \Rightarrow 3$  und  $2 \Rightarrow 1$  sind trivial;  
ebenso wegen der Allgemeingültigkeit von

$$\forall x_1 \dots \forall x_n B \rightarrow \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}(B)$$

die Implikationen  $1 \Rightarrow 3$  und  $2 \Rightarrow 4$ .

Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß  $3 \Rightarrow 2$ .



## Beweis

Es sei  $\mathcal{D}$  ein Modell von Grundinstanzen( $M$ ).

Wir definieren eine Herbrand-Interpretation  $\mathcal{H} = (\text{Term}_{\Sigma}^0, J)$ .

$$J(p) := \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \text{Term}_{\Sigma}^0, \text{val}_{\mathcal{D}}(p(t_1, \dots, t_n)) = W\}$$

für Prädikatsymbole  $p$  einer Stelligkeit  $n$ .

Für jedes geschlossene Atom  $A$  gilt also  $\text{val}_{\mathcal{H}}(A) = \text{val}_{\mathcal{D}}(A)$

Durch Induktion beweist man diese Relation für alle geschlossenen, quantorenfreien Formeln  $A$ .

Für  $\forall x_1 \dots \forall x_n B \in M$  gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D}}(\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}B) = W \quad \text{für alle Grundinstanzen } t_1, \dots, t_n$$

$$\text{val}_{\mathcal{H}}(\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}B) = W \quad \text{für alle Grundinstanzen } t_1, \dots, t_n$$

$$\text{val}_{\mathcal{H}}(\forall x_1 \dots \forall x_n B) = W$$



# Satz von HERBRAND

## 2. Form

Sei  $\phi$  eine quantorenfreie Formel ohne Gleichheit mit einer freien Variablen  $x$ . Dann gilt

$\exists x \phi$  ist allgemeingültig

gdw

es gibt eine natürliche Zahl  $n$   
und Grundterme  $t_1, \dots, t_n$ , sodaß  
 $\phi(t_1) \vee \dots \vee \phi(t_n)$   
allgemeingültig ist.





## Beweis der 2. Form des Satzes von HERBRAND

$\exists x\phi$  ist allgemeingültig

$\Leftrightarrow \neg\exists x\phi$  besitzt kein Modell

$\Leftrightarrow \forall x\neg\phi$  besitzt kein Modell

$\Leftrightarrow \{\neg\phi(t) \mid t \text{ Grundterm}\}$  besitzt kein Modell

$\Leftrightarrow$  es gibt ein  $n$  und  $t_1, \dots, t_n$  so daß

$\{\neg\phi(t_1), \dots, \neg\phi(t_n)\}$  kein Modell besitzt  
(Anwendung des Endlichkeitssatzes)

$\Leftrightarrow \neg\phi(t_1) \wedge \dots \wedge \neg\phi(t_n)$  besitzt kein Modell

$\Leftrightarrow \phi(t_1) \vee \dots \vee \phi(t_n)$  ist allgemeingültig

