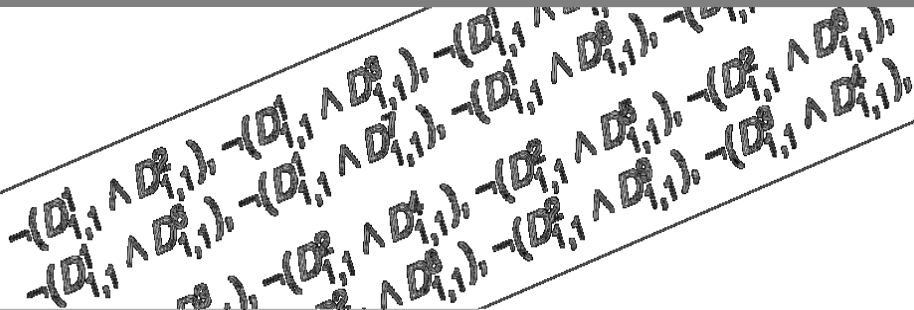


Formale Systeme

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- in jeder der neun Spalten
- in jeder der neun Reihen
- und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D_{9,1}^9$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{1,4}^1 \vee D_{1,5}^1 \vee D_{1,6}^1 \vee D_{1,7}^1 \vee D_{1,8}^1 \vee D_{1,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{2,1}^1 \vee D_{2,2}^1 \vee D_{2,3}^1 \vee D_{3,1}^1 \vee D_{3,2}^1 \vee D_{3,3}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens **eine** Zahl stehen kann.

$$\begin{aligned} &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^2), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^5), \\ &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^6), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^9), \\ &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^5), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^6), \\ &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^9), \neg(D_{1,1}^3 \wedge D_{1,1}^4), \end{aligned}$$

USW.

Allgemein:

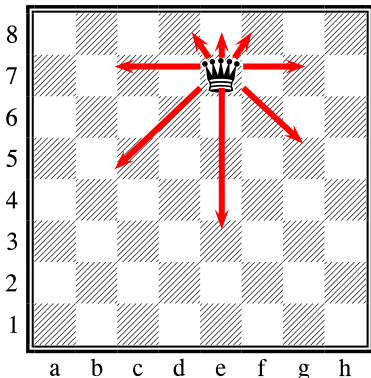
$$\neg(D_{i,j}^s \wedge D_{i,j}^t)$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

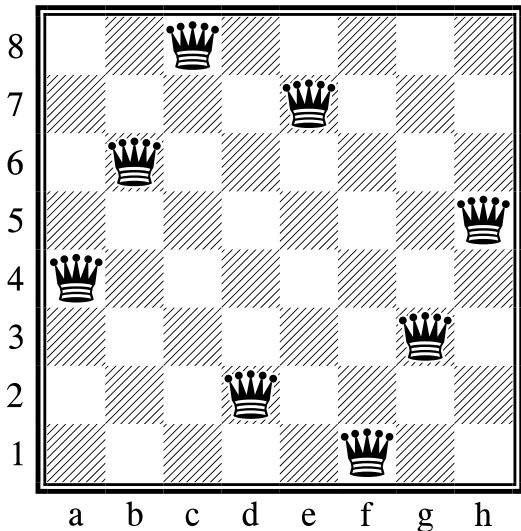
Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Das 8-Damen-Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems



Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- \neg Negationssymbol („nicht“)
- \wedge Konjunktionssymbol („und“)
- \vee Disjunktionssymbol („oder“)
- \rightarrow Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- \leftrightarrow Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \dots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der
Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
- $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch
 - $\neg A$
 - $(A \wedge B)$
 - $(A \vee B)$
 - $(A \rightarrow B)$
 - $(A \leftrightarrow B)$

Elemente von $For0_\Sigma$

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine **Interpretation** über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}.$$

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige **Auswertung** der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_{\Sigma} \rightarrow \{W, F\}$$

mit:

$$val_I(\mathbf{1}) = W$$

$$val_I(\mathbf{0}) = F$$

$$val_I(P) = I(P) \quad \text{für jedes } P \in \Sigma$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

Auswertung (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \wedge B)$	$val_I(A \vee B)$	$val_I(A \rightarrow B)$	$val_I(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

- 1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *ja*
- 2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ *ja*
- 3 $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$ *nein*
- 4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ *nein*
- 5 $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$ *ja*

Definition

- Ein **Modell** einer Formel $A \in For0_{\Sigma}$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmengemenge $M \subseteq For0_{\Sigma}$ ist ein Modell von M eine Interpretation I , welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_{\Sigma}$ heißt **allgemeingültig**
gdw
 $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ .
- $A \in For0_{\Sigma}$ heißt **erfüllbar**
gdw
es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_{\Sigma}$, $A, B \in For0_{\Sigma}$.

- $M \models A$ lies: **aus M folgt A**
gdw
Jedes Modell von M ist auch Modell von A .
- $A, B \in For0_{\Sigma}$ heißen **logisch äquivalent**
gdw
 $A \models_{\Sigma} B$ und $B \models_{\Sigma} A$

$$A \rightarrow A$$

Selbstimplikation

$$\neg A \vee A$$

Tertium non datur

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Abschwächung

$$0 \rightarrow A$$

Ex falso quodlibet

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

Idempotenz

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

Absorption

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Distributivität

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivität

Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ Kontraposition

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Verteilen

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

De Morgan

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

De Morgan

Theorem

- A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig